

Piotr WODZIŃSKI\*

## **O PRAWDOPODOBIENSTWIE ODSIEWU**

Niniejsza praca jest próbą opisu procesu przesiewania materiałów ziarnistych z zastosowaniem teorii prawdopodobieństwa. Zasadniczym parametrem, mającym charakter uniwersalnego kryterium matematycznego, opisującego proces przesiewania, jest prawdopodobieństwo przesiewu, zwane też liczbą przesiewu (odsiewu). Jest ona w zasadzie funkcją wszystkich podstawowych wielkości determinujących proces przesiewania materiałów sypkich. Dlatego wydaje się ono dość wygodnym parametrem opisującym zjawisko i mającym charakter zmiennej niezależnej.

Przedstawiono podstawy teoretyczne liczby odsiewu i omówiono metody jej wyznaczania. Zwrócono uwagę na cel pracy, jakim jest nowa metoda projektowania maszyn przesiewających. Artykuł jest pierwszy z cyklu publikacji na ten temat. W dalszych pracach zostaną przedstawione dane doświadczalne, uzyskane przez autora w trakcie badań wykonywanych w laboratoriach Katedry Aparatury Procesowej Politechniki Łódzkiej.

### **WPROWADZENIE**

Niniejsza praca poświęcona jest procesowi przesiewania, a więc zjawisku fizycznemu rozkładu ziaren na sicie. Jednym z zasadniczych problemów, które muszą być rozwiązane w technice przesiewania, jest opracowanie odpowiedniej metody projektowania przesiewaczy. Metoda taka sprowadza się na ogół do sposobu określania wielkości sit, tzn. wyznaczenia ich powierzchni niezbędnej do przeprowadzenia określonego procesu. Zadanie jest więc takie: jakiej powierzchni sitowej należy użyć, aby rozsiać na niej określony strumień materiału ziarnistego z określoną efektywnością i z uwzględnieniem znanych charakterystyk materiału przesiewanego, sita oraz ruchu maszyny. Znanych jest wiele takich metod projektowania przesiewaczy. Najpełniejszy ich zestaw opisał Sztaba (1993), podając jednocześnie za autorami tych metod, dane empiryczne niezbędne do ich wykorzystania. Dlatego w niniejszym opracowaniu nie zostaną zaprezentowane żadne znane metody i wzory służące do projektowania przesiewaczy. Autor niniejszego artykułu uznał bowiem, iż istniejące metody obliczania wielkości sit są powszechnie dostępne w literaturze dotyczącej tematu.

Podstawowym parametrem, który wprowadził autor jest tzw. liczba odsiewu. Jest to liczba mająca charakter uniwersalnego kryterium, które określa i uwzględnia

---

\* Katedra Aparatury Procesowej Politechniki Łódzkiej, ul. Wólczańska 175, 90-924 Łódź.

wszystkie najważniejsze zmienne niezależne, mające znaczenie dla procesu przesiewania. Jak wiadomo proces przesiewania składa się z dwóch zjawisk cząstkowych: procesu segregacji ziaren w warstwie na sicie i procesu przechodzenia ziaren przez otwory sitowe. Procesy te następują szeregowo jeden po drugim. Wiadomo powszechnie, że aby ziarno reprezentujące swym wymiarem charakterystycznym klasę dolną (produkt podstawowy), mogło wpaść i następnie przejść przez otwór sitowy, musi znaleźć się w bezpośredniej bliskości sita w tzw. warstwie wysypowej. Natomiast ziarna podawane w strumieniu ziarnistym na sito tworzą nań warstwę o grubości większej od warstwy przysitowej (wysypowej). Znaczenie grubości tych warstw jest istotne w przesiewaniu materiałów drobnych i bardzo drobnych. Jak wiemy, materiały gruboziarniste przesiewamy w cienkich warstwach, które mają grubość jednej lub najwyżej kilku przeciętnych średnic ziaren w zbiorze przesiewanym. Natomiast materiały drobno uziarnione ( $d_m < 1$  mm) lub bardzo drobno uziarnione ( $d_m < 0,1$  mm) mogą być przesiewane tylko w warstwach grubych. Tam bowiem utrzymanie tak cienkich warstewek na sicie jest niewykonalne. Rozważania zawarte w niniejszej pracy odnoszą się zarówno do przesiewania cienkowarstwowego, jak i grubowarstwowego.

Liczba odsiewu, która ma charakter prawdopodobieństwa odsiewu, składa się z dwóch elementów: liczby segregacji warstwy (prawdopodobieństwa rozsegregowania warstwy) i liczby przejścia przez otwór sitowy (prawdopodobieństwo wpadnięcia ziarna w otwór sitowy). Podobne podejście do zagadnienia przesiewania przedstawił już dawno Michelin (1945), jednak trudno pogodzić się z jego zapisami. Należy jednakże zauważyć, iż praca Michelina ma do dzisiaj fundamentalne znaczenie w teorii ogólnej przesiewania. Podstawowym jest zapis

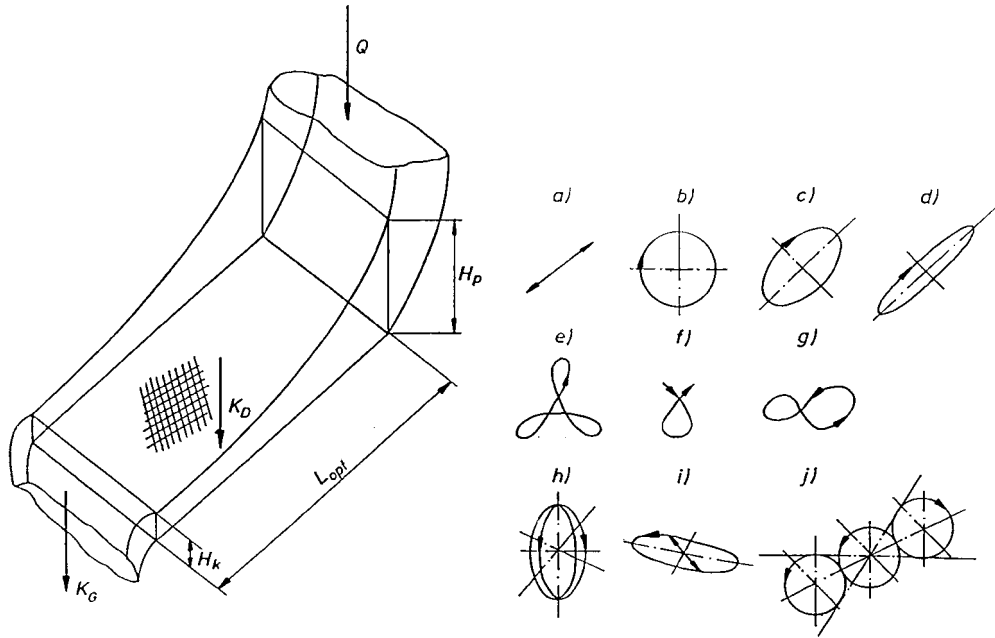
$$\Pi_o = \Pi_w \Pi_s \quad (1)$$

gdzie  $\Pi_o$  oznacza liczbę odsiewu,  $\Pi_w$  liczbę warstwy, a  $\Pi_s$  liczbę sita. W ujęciu Michelina sam zapis jest podobny. Autor niniejszej pracy proponuje jednak zupełnie inne ujęcie poszczególnych wielkości i inny zapis matematyczny.

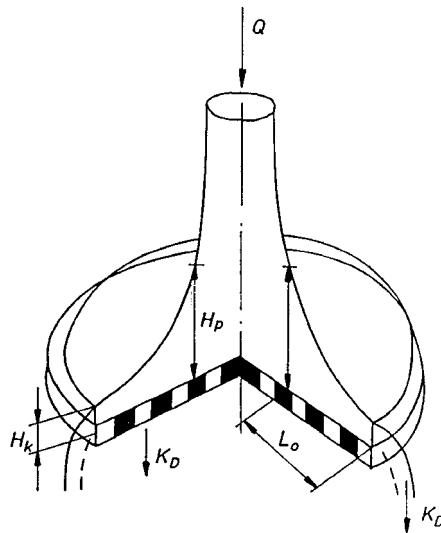
## MODELOWY PROCES PRZESIEWANIA

Istniejące w praktyce przemysłowej maszyny przesiewające realizują procesy przesiewania według dwóch podstawowych schematów. Schemat liniowy (rys. 1) jest przedstawiony na przykładzie przesiewacza o sicie prostokątnym, gdzie mamy do czynienia z liniowym wzdłużnym transportem materiału ziarnistego. Strumień nadawy  $Q$  tworzy na sicie warstwę ziarnistą o grubości początkowej  $H_p$  i końcowej  $H_k$ . Sito porusza się ruchem drgającym, a różne tory sit (rys. 1a–j) są charakterystyczne dla różnych maszyn przesiewających. Niezależnie od zastosowanego toru ruchu sita, końcowy efekt procesowy jest podobny. Przesiewanie odbywa się na drodze  $L_0$ , będącej optymalną długością sita. Pod pojęciem optymalnej długości sita rozumiemy

taką



Rysunek 1



Rysunek 2

długość powierzchni sitowej, zależną od wcześniej założonej szerokości sita, na której następuje odsiew klasy dolnej do założonej z góry efektywności. Można zamiennie

operować pojęciem optymalnego czasu przesiewania, jednak wówczas mówimy o czasie pozostawienia warstwy ziarnistej na sicie, który przy obliczonej średniej prędkości transportowania warstwy zapewnia ruch tej warstwy na drodze  $L_0$ .

Drugim podstawowym schematem przesiewania jest układ promieniowy (rys. 2), w którym występują te same zjawiska i te same elementy procesu. Mamy do czynienia z centralnym podawaniem nadawy na sito (strumień  $Q$ ) oraz z promieniowym przebiegiem procesu przesiewania – od środka sita do jego obrzeża. W zasadzie ziarna poruszają się nie po liniowym promieniu koła, którym jest sito, ale po spiralnej krzywej, biegnącej od sita ku obwodowi. I znów możemy wyszczególnić dwie skrajne wartości wysokości (grubości) warstwy na sicie:  $H_p$  i  $H_k$  oraz optymalną długość sita, która w tym układzie odpowiada promieniowi sita.

Wróćmy do pierwszego schematu przesiewania liniowego. Takich układów jest najwięcej. Materiał ziarnisty do segregacji (nadawy) jest kierowany na początek sita i składa on się z klasy górnej  $K_G$  i klasy dolnej  $K_D$ . Zakładamy, że są to dwa rodzaje ziaren (ze względu na wielkość), równomiernie rozmieszczone w całej objętości strumienia ziarnistego kierowanego na sito. Z sita, jako produkt nadsitowy, spada cała ilość klasy górnej  $K_G$  (bo nie mogła przejść przez otwory sitowe z uwagi na swoje wymiary ziaren) i pewna część klasy dolnej  $K_D$ , która nie zdołała się odsiać. Ta właśnie część nieodsianej klasy dolnej stanowi o efektywności procesu przesiewania. Wielkość ta bywa definiowana następująco:

$$\eta = \frac{\text{Ilość klasy dolnej odsianej przez sito}}{\text{Ilość klasy dolnej w strumieniu kierowanym na sito}} \quad (2)$$

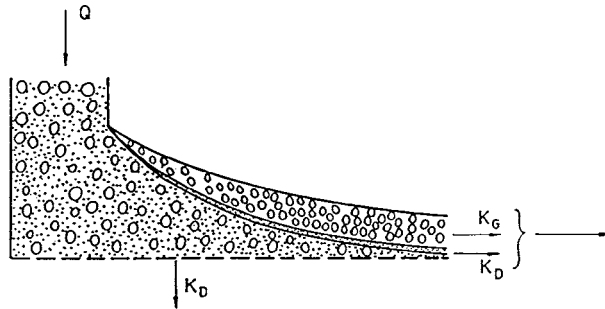
$$\eta = \frac{Y}{K_D} \quad (3)$$

Całościowo zagadnienie efektywności przesiewania\* pokazano na rys. 4. Najpierw mamy materiał wyjściowy  $Q$ , w którym są zarówno ziarna należące do klasy górnej jak i dolnej. Idealny podział sitowy pokazuje rys. 4a. Na rysunku 4b mamy zilustrowany podział według schematu 3. Oznacza to, że w produkcie nadsitowym istnieje pewna ilość klasy dolnej, której zabrakło w produkcie podsitowym. Na rysunku 4c przedstawiono przypadek, gdy wprawdzie cała klasa dolna przeszła przez sito, ale wraz z nią niewłaściwie odsiała się część klasy górnej. Taka sytuacja jest możliwa w kilku przypadkach, np. uszkodzenia sita. I wreszcie w ostatnim wariancie mamy do czynienia z najbardziej ogólnym przypadkiem, gdy występują obie sprawności odsiewania: dla klasy górnej i klasy dolnej. Zazwyczaj do jakościowego

---

\* Opiswane tutaj pojęcia (w tym funkcje wypływu, warstwa wysypowa) zostały wprowadzone po raz pierwszy w projekcie badawczym KBN *Klasyfikacja materiałów bardzo drobnouziarnonych*, nr 3 0116 9101 kierowanym przez prof. zw. dr hab. inż. Kazimierza Sztabê z AGH w Krakowie.

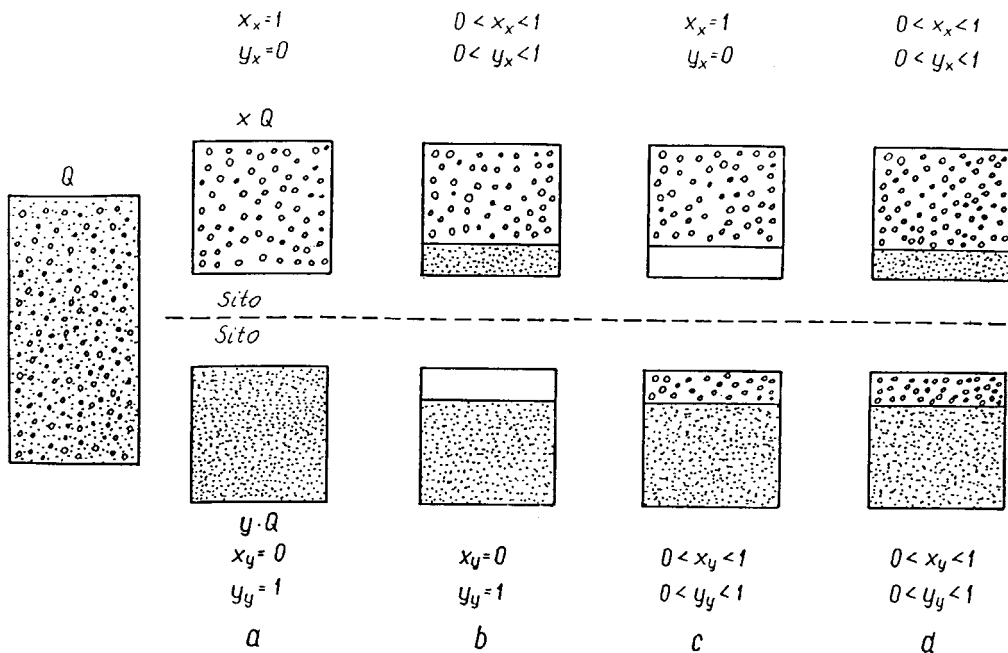
opisu przebiegu procesu przesiewania używamy pojęcia sprawności klasy dolnej, definiowanej wyrażeniami (2), (3) i pokazanej schematycznie na rys. 4b.



Rysunek 3

Ważnym zagadnieniem w procesie przesiewania jest tzw. funkcja wypływu. Jest to zależność pomiędzy bieżącą wysokością warstwy na sicie, a czasem przesiewania lub długością sita:

$$H = H(t) \qquad H = H(L) \qquad (4)$$



Rysunek 4

Wysokość warstwy na sicie może być tutaj zastąpiona masą materiału ziarnistego, pozostającego w warstwie na sicie. Schematycznie warstwa na sicie i funkcja wypływu zostały pokazane na rys. 6. Po nasypianiu materiału na sito mamy wysokość warstwy  $H_P$  i następuje pierwszy wysyp grawitacyjny materiału przez otwory sitowe. Wysyp ten ma miejsce z warstwy wysypowej  $H_w$ , z której wypływa cała zawarta w niej klasa dolna. Wtedy grubość warstwy na sicie osiąga wartość  $H_{PW}$  i z tego momentu (p. B) następuje proces przesiewania. Funkcja wysypu będąca funkcją typu  $e^x$  jest (w swej graficznej interpolacji) linią zarysu zewnętrznej powierzchni warstwy ziarnistej, przesiewanej na sicie przesiewacza. Zauważamy, że łatwo ją opisać matematycznie, ponadto zawiera ona w sobie tylko dwie wielkości empiryczne (dwa współczynniki wyznaczane doświadczalnie). Mając więc funkcję wypływu dla danego układu przesiewanego (materiał–sito), możemy w łatwy sposób projektować proces przesiewania. Położenie różnych funkcji wypływu, przedstawionych liniami przerywanymi na rys. 5 i liniami 1–5 na rys. 6, świadczy o łatwości prowadzenia procesu. Linia 1 obrazuje łatwo przesiewający się układ ziarnisty, natomiast linia 5 układ, z rozsianiem którego wystąpią kłopoty. Model procesu przesiewania opisywany w niniejszym artykule ma i tę cechę charakterystyczną, iż badania procesu, służące do wyznaczania poszczególnych współczynników, mogą być prowadzone na wstrząsarce laboratoryjnej za pomocą testowych sit laboratoryjnych. Następnie otrzymane wielkości mogą być podstawą do projektowania procesu przemysłowego.

W niniejszym opracowaniu zostanie zaprezentowany modelowy proces przesiewania przemysłowego. Rozważania tutaj zawarte stanowią podstawę probabilistycznej metody wyznaczania powierzchni sit. Metoda ta opiera się na wielkości prawdopodobieństwa odsiewu, którą autor nazwał liczbą odsiewu. Na rysunku 9 przedstawiono schemat liniowego procesu przesiewania. Zaprezentowany model jest słuszny także dla promieniowego schematu przesiewania. W schemacie tym mamy: szerokość sita  $B$ , przekroje warstwy ziarnistej, początkowy  $W_P$  i końcowy  $W_K$ , optymalną długość sita  $L_0$ , która jest wielkością szukaną (będzie wyznaczona). W warstwie ziarnistej wyodrębniono tzw. warstwę jednostkową, która jest skończonym elementem strugi ziarnistej o wymiarach  $B \times H \times l$  ( $l$  – wymiar charakteryzujący otwór sitowy). Warstwa jednostkowa porusza się po sicie ze średnią prędkością transportowania materiału ziarnistego  $u_m$ . Ostatni parametr wyznaczamy za pomocą znanych wzorów.

Struga ziarnista przedstawiona na rys. 7, ma przekrój początkowy  $W_P = BH_P$  i końcowy  $W_K = BH_K$ . Z równania ciągłości strugi mamy:

$$Q_P = BH_P u_m \rho_n \quad (5)$$

$$Q_K = BH_K u_m \rho_n \quad (6)$$

gdzie  $Q_P$  i  $Q_K$  są natężeniami masowego przepływu strugi ziarnistej odpowiednio przez przekroje  $W_P$  i  $W_K$ , natomiast  $\rho_n$  jest gęstością nasypową medium ziarnistego. Jeżeli przez  $x$  oznaczymy udział (zawartość) klasy górnej  $K_G$  w materiale wyjściowym, a przez  $y$  zawartość klasy dolnej  $K_D$  w nadawie, to mamy:

$$K_G = Qx \quad (7)$$

$$K_D = Qy$$

Wobec tego

$$Q_K = K_G + (1 - \eta) K_D = Qx + (1 - \eta) Qy \quad (8)$$

Możemy teraz wyznaczyć  $H_P$  i  $H_K$  w zależności od charakterystyk projektowanego procesu

$$H_P = \frac{Q_P}{u_m \rho_n B} \quad (9)$$

$$H_K = \frac{Q_P + (1 - \eta) Qy}{u_m \rho_n B} \quad (10)$$

Prędkość transportowa materiału na sicie  $u_m$  (prędkość warstwy jednostkowej wzdłuż sita – rys. 7), jest opisana wieloma znanymi równaniami. Znanie są wyrażenia uzyskane przez uczonych niemieckich, rosyjskich, polskich i innych. Banaszewski (1990) i Sztaba (1993) opisują wiele takich wzorów, podając jednocześnie dodatkowe dane empiryczne, niezbędne do ich stosowania. Chcę zaproponować dwa wyrażenia do wyznaczania  $u_m$ : Dietrycha i Czubaka. Wzór Dietrycha ma postać:

$$u_m = \frac{g \cos \alpha}{\omega \sin \beta} \sqrt{\frac{K-1}{2} (K^2 - 1)} \quad (11)$$

gdzie:  $g$  jest przyspieszeniem ziemskim,  $\omega$  jest częstością kątową,  $\alpha$  stanowi kąt nachylenia sita do poziomu  $\beta$  zaś jest kątem torów sita (kąt pomiędzy powierzchnią sita, a linią działania siły napędowej), natomiast  $K$  jest wskaźnikiem podrzutu.

Wzór Czubaka (1965) ma postać:

$$u_m = \xi \frac{g m^2}{2 p n} (\cos \alpha \operatorname{ctg} \beta - \sin \alpha) \quad (12)$$

gdzie:  $\xi$  jest empirycznym współczynnikiem korelacyjnym,  $g$  – przyspieszeniem ziemskim,  $m$  – stosunkiem czasu lotu ziarna do okresu drgań sita (obliczony w funkcji  $K$ ),  $p$  - pierwszą liczbą całkowitą równą lub większą od  $m$ ,  $n$  – częstością drgań, a kąty  $\alpha$  i  $\beta$  charakteryzują maszynę.

Autor niniejszej pracy badał oba wzory i stwierdził ich dobrą zgodność z rzeczywistością. Wyzначzył także parametr  $\xi$ , uzależniając go od innych zmiennych niezależnych, mających wpływ na proces przesiewania.

#### LICZBA SEGREGACJI WARSTWY (LICZBA WARSTWY)

Liczba segregacji warstwy  $\bar{\Pi}_w$  jest parametrem określającym zdolność warstwy do segregacji w warunkach danego procesu przesiewania. Do tej pory parametr ten opisał Michelin (1945), jednakże trudno obecnie zgodzić się z jego rozważaniami. Proponuję, aby liczbę segregacji warstwy zapisać jako:

$$\bar{\Pi}_w = \frac{H_w}{H_m} \quad (13)$$

gdzie  $H_w$  jest grubością warstwy wysypowej,  $H_m$  zaś średnią grubością warstwy na całym sicie. Zaczniemy od wyznaczenia drugiego parametru. W najprostszym ujęciu może to być średnia arytmetyczna

$$H_m = \frac{H_P + H_K}{2} \quad (14)$$

albo średnia planimetryczna (rys. 8).  $H_m$  to taka wysokość (grubość) warstwy na sicie, dla której pola zakreskowane na rys. 8 są jednakowe. Ten zapis właściwie oddaje znaczenie i sens parametru  $H_m$ , natomiast wysokość warstwy wysypowej  $H_w$  jest wyznaczana na drodze doświadczalnej i zależy ona od charakterystyk materiału i sita. W tej wielkości uwzględnione są wilgotność materiału przesiewanego, kształt ziaren, simplex  $d_m/l$  (sito/materiał) i inne czynniki.

Prace badawcze prowadzone obecnie przez autora niniejszego artykułu w PŁ są poświęcone m.in. wyznaczeniu  $H_w$  i skorelowaniu go w zależności od innych omawianych wielkości.

#### LICZBA SITA

Drugą liczbą mającą charakter prawdopodobieństwa jest tzw. liczba odsiewu. Określa ona zdolność wpadania ziarna w otwór sitowy. Na ten temat opublikowano szereg prac, z których fundamentalną wydaje się praca Michelina (1945). I znów autor niniejszego artykułu nie może zgodzić się z poglądami francuskiego badacza i dlatego zaproponował własną interpretację tej wielkości. Rozważania tutaj przedstawione zostały przeprowadzone dla kwadratowego otworu sitowego. Jednakże bardzo łatwo jest je rozszerzyć na otwory sitowe o innych kształtach (np. kołowe, prostokątne etc.). Mam jednak na uwadze to, iż zdecydowana większość sit używanych w praktyce



przemysłowej i w badaniach laboratoryjnych, to właśnie sita o otworach kwadratowych.

Rozważania przedstawione poniżej dotyczą schematycznego pokazania warstwy na sicie rys. 9. Warstwa przesiewana spoczywa na sicie, a od góry jej powierzchnia ograniczona jest funkcją wypływu. Warstwa wysypowa ma jednakową i stałą grubość  $H_w$ , a otwór kwadratowy w sicie ma wymiar  $l$ . Wielkość  $d_s$  jest tzw. mostkiem sitowym. Nad otworem sitowym określamy tzw. objętość kontrolną. Jest to prostopadłościan o boku podstawy  $(l + d_s)$ , z którego wysypuje się w czasie jednego cyklu pracy maszyny, cała zawarta w tym sześcianie klasa dolna. Wysokość tego sześcianu wynosi  $H_w$  i jest równa grubości warstwy wysypowej. Objętość tego sześcianu wyznaczamy ze wzoru

$$V_K = (l + d_s)^2 H_w \quad (15)$$

Natomiast objętość klasy dolnej, zawarta w objętości kontrolnej wynosi

$$V_{KD} = (l + d_s)^2 H_w y \quad (16)$$

natomiast masa klasy dolnej zawartej w objętości kontrolnej

$$M_{KD} = (l + d_s)^2 H_w y \rho_n \quad (17)$$

Proponuje się dwie różne definicje liczby odsiewu. Pierwsza definicja liczby odsiewu ma postać:

$$\Pi'_s = \frac{\text{Objętość ziaren klasy dolnej zawartych w objętości kontrolnej}}{\text{Przeciętna średnica ziarna w klasie dolnej}} \cdot \frac{1}{\text{Pole potencjalnego przejścia ziarna w otworze sitowym}}$$

co w zapisie wielkości fizycznych ma postać:

$$\Pi'_s = \frac{H_w (l + d_s)^2}{(l - d_{DK})} = \frac{H_w (l + d_s)^2 y}{d_{KD} (l - d_{KD})} \quad (18)$$

Druga definicja liczby odsiewu jest następująca:

$$\Pi''_s = \frac{\text{Masa klasy dolnej możliwa do odsiania przez otwór sita}}{\text{Masa przeznaczona do odsiania i zawarta w objętości kontrolnej}}$$

$$\Pi_s^n = \frac{(l - d_{KD})^2 d_{KD}}{H_w (l + d_s)^2 y} \quad (19)$$

Zauważamy, że:

$$\Pi_s' = \frac{1}{\Pi_s^n} \quad (20)$$

Po analizie obu tych definicji do dalszych rozważań postanowiono użyć drugiego sformułowania, wyrażonego wzorem (19).

### PODSUMOWANIE

Zgodnie z wprowadzonym modelem i opisem procesu przesiewania, autor proponuje stosowanie dwóch nowych parametrów charakteryzujących proces przesiewania:

- liczby segregacji warstwy (liczba warstwy),
- liczby sita.

Obie te liczby pomnożone przez siebie dają liczbę przesiewania, zwaną też liczbą odsiewu. Zauważamy, iż obie te wielkości zawierają w sobie wszystkie ważne parametry, charakteryzujące przemysłowy proces przesiewania materiałów ziarnistych. W tej wielkości, określonej wzorem (1) mamy uwzględnione:

- ruch przesiewacza,
- wydajność procesu,
- sprawność (efektywność procesu),
- charakterystyki granulometryczne materiału wyjściowego do przesiewania,
- wilgotność materiału,
- charakterystyki sita.

Podstawową będzie więc korelacja:

$$t_0 = t_0(\Pi_0) \quad (21)$$

gdzie  $t_0$  jest optymalnym czasem przesiewania. Optymalny czas przesiewania to taki czas, po którym w danych warunkach nastąpi odsiew klasy dolnej z danego strumienia ziarnistego. Jest to zatem czas niezbędny do realizacji procesu przesiewania określonego zmiennymi niezależnymi. Mając ten czas w łatwy sposób wyznaczamy optymalną długość sita  $L_0$

$$L_0 = u_m t_0 \quad (22)$$

natomiast transportową prędkość materiału na sicie  $u_m$  potrafimy wyznaczyć. Szerokość sita B została już założona i uwzględniona przy obliczaniu przekroju strugi ziarnistej, podawanej na sito maszyny przesiewającej. Powierzchnia sita więc będzie

$$F_0 = L_0 B \quad (23)$$

Do posługiwania się probabilistyczną metodą projektowania przesiewaczy konieczna jest znajomość korelacji:

- umożliwiających wyznaczenia  $H_w$ ,
- równań typu (21).

Metoda ta wymaga jedynie znajomości tych dwóch zależności, w których „zawarte” są wszystkie dane dotyczące procesu. W Katedrze Aparatury Procesowej Politechniki Łódzkiej trwają prace zmierzające do określenia tych funkcji.

### LITERATURA

- BANASZEWSKI T., 1990, *Przesiewacze*, Wyd. Śląsk, Katowice.  
CZUBAK A., 1964, *Przenośniki wibracyjne*, Wyd. Śląsk, Katowice  
DIETRYCH J., 1962, *Teoria i budowa przesiewaczy*, WGH, Katowice  
MICHELIN F. 1945, *Theorie du rendement de criblage*, Revue de l'Industrie Minerale, nr 502  
SCHMIDT P., *Das Siebklassieren*, 1984, Chem. Ing. Tech. 12, 897  
SZTABA K. *Przesiewanie*, 1993, Śląskie Wyd. Tech., Katowice

**Wodziński P.**, On the probability of separation by screening. *Physicochemical Problems of Mineral Processing*, 31, 235–240 (in Polish)

The present paper describes the process of screening of granular material using the theory of probability. The basic parameter, which is considered in the paper, is the probability of screening also called the screening number. In general, the screening number includes all basic parameters which determine the process of screening of loose materials and is an independent variable. In this paper theoretical bases of the screening number are presented and methods of its determination described. Attention is paid to this new method of describing screening machines.